Tentamen Introduction to Differentiable Manifolds 1

26 Januari 2018

Vraag 1 (De sigaar):
Stel je, gegeven $r \in \mathbb{R}$, het oppervlak $C = f^{-1}(\{1\})$ voor, waarbij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de formule $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + r^2 z^2$ heeft.

a. Beschrijf expliciet de raakruimte C_p voor $p = (1, 0, 0) \in C$.
De raakruimte staat loodrecht op $\nabla f(p) = (p, (2, 0, 0))$ en is dus het span van (p, e_2) en (p, e_3) in $\mathbb{R}^3_p$.

b. Geef een formule voor het naar buiten wijzende eenheidsnormaalvectorveld op C.
Voor ieder punt $c \in C$ staat $\nabla f(c)$ loodrecht op de raakruimte, dus is $\mathbf{N}(c) = \frac{\nabla f(c)}{|\nabla f(c)|} = (c, \frac{(x,y,r^2 z)}{\sqrt{x^2+y^2+r^4 z^2}})$ een eenheids-normaal vectorveld. Bovendien wijst het veld naar buiten in de zin dat $N(c) = \dot{\alpha_c}$ voor een pad $\alpha_c : (0, \infty)$ dat van binnen naar buiten loopt, gegeven door $\alpha_c(t) = tN(c)$ met $\mathbf{N}(c) = (c, N(c))$.

c. Is de kromme $\alpha : [0, 2\pi] \to C$ gegeven door $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ een geodeet?
Ja dit is een geodeet want voor iedere t geldt $\ddot{\alpha}(t) = (\alpha(t), -\alpha(t)) = -\mathbf{N}(\alpha(t))$.

d. Bereken het parallel transport van de vector $v = (p, (0, 1, 1)) \in C_p$ langs de kromme α.
Parallel transport langs een geodeet behoudt de lengte en de hoek met de snelheidsvector van de geodeet. Daarom moet dus het parallel transport van v weer de vector v zijn. Dat is immers de unieke raakvector die lengte $\sqrt{2}$ heeft en dezelfde hoek met de snelheidsvector van α heeft als v.
Alternatief: het vectorveld $\mathbf{Q}(t) = (\alpha(t), (0, 0, 1)) + \dot{\alpha}(t)$ is parallel en rakend langs α en $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}(2\pi) = v$. Dit is duidelijk uit het feit dat Q de som is van een constant vectorveld en het snelheidsveld van een geodeet. We moeten wel nog nagaan dat $(\alpha(t), (0, 0, 1)) \perp \mathbf{N}(\alpha(t))$, maar dat is duidelijk.

e. Neem aan dat $r \neq 0$ Schrijf de integraal $\int_H \omega$ als een integraal over ∂H waarbij $H = C \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$ en $\omega = dx \wedge dy + dx \wedge dz$ en bereken deze lijnintegraal. De oriëntatie op H is gegeven door het normaalveld uit deel b.
Schrijf $\omega = d(xdy + xdz)$. Met de formule van Stokes geldt (omdat $r \neq 0$) dus $\int_H \omega = \int_{\partial H} x(dy + dz)$. De kromme α uit deel c parameteriseert de rand van H met de consistente geinduceerde orientatie. Dat betekent dat we de integraal $+\int_\alpha x(dy + dz)$ moeten uitrekenen. Per definitie is dat de integraal $\int_{(0,2\pi)} x(dy+dz)(E_1^\alpha) = \int_0^{2\pi} \cos(t)(\cos(t)dt+0) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(t)+1)dt = \pi$.

Vraag 2 (beetje krom):
Bewijs dat er geen S compact georiënteerd 2-oppervlak in $\mathbb{R}^3$ bestaat met de eigenschap dat voor alle $p \in S$ geldt: $0 < K(p) < \frac{2\pi}{V(S)}$. Hierbij is K de Gausskromming en V het volume van S.
Kies een rakend eenheidsvectorveld $\mathbf{X}$ met geisoleerde singulariteiten op S. Zo een vectorveld bestaat altijd want we kunnen S overdekken met eindig veel kaarten en met behulp van een partitie van 1 coordinaat-vectorvelden combineren tot een vectorveld met geisoleerde nulpunten. Dit veld delen door zijn norm geeft het gevraagde veld $\mathbf{X}$. Volgens de globale Gauss-Bonnet stelling geldt dat $\int_S K = 2\pi \sum_i \text{index}(\mathbf{X}, p_i)$ met p_i de singulariteiten. De linkerkant kunnen we schatten met $0 < \int_S(K) \leq \max K \int_S 1 = \max K V(S) < 2\pi$. Maar de index is altijd een geheel getal. Dit is in tegenspraak met de rechterkant van Gauss-Bonnet.
Vraag 3 (Thorpe 17.7):
Stel $g : U \to \mathbb{R}$ is een gladde functie gedefinieerd op de open verzameling $U \subset \mathbb{R}^n$. Definieer $\phi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ door $\phi(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots u_n, g(u_1, \ldots, u_n))$. Laat zien dat $V(\phi) = \int_U (1 + \sum_i (\frac{\partial g}{\partial u_i})^2)^{\frac{1}{2}}$. Bereken $V(\phi)$ voor $n = 2$ en U de open eenheidsschijf en $g(u_1, u_2) = u_1 + u_2$.
Volgens stelling 1 uit hfst 17 geldt dat $V(\phi) = \int_U \sqrt{\det(E_i \cdot E_j)}$ met E_i het i-de coordinaat-vectorveld. In ons geval geldt $E_i = e_i + \partial_i g e_n$ en dus $E_i \cdot E_j = \delta_{i,j} + \partial_i g \partial_j g$. Dus we moeten de determinant van de matrix $I + vv^T$ uitrekenen waarbij $v = \nabla g$ (gezien als kolomvector). Dat kan met inductie naar n maar het gaat sneller als je de identiteit $\det(e^X) = e^{\text{tr} X}$ gebruikt en werkt met een nilpotent element ϵ dat voldoet aan $\epsilon^2 = 0$ (dus we werken over de ring $\mathbb{R}[\epsilon]/(\epsilon^2 = 0)$). Dan kun je schrijven

$$\det(I + vv^T) = \det(e^{\epsilon vv^T}) = e^{\text{tr} \epsilon vv^T} = e^{\epsilon v^T v} = 1 + v^T v$$

Vraag 4:

a. Geef voor iedere $1 \leq k \in \mathbb{N}$, $1 < n \in \mathbb{N}$ een voorbeeld van een geparameteriseerd n-oppervlak in $\mathbb{R}^{n+k}$ waar de coördinaatvectorvelden op geen enkel punt een orthogonale basis vormen.
Kies bijvoorbeeld de grafiek ϕ van uit vraag 3 met $g(u_1, .., u_{n+k}) = u_1 + u_2$. Dan geldt dat $E_1 = e_1 + e_{n+k}$ en $E_2 = e_2 + e_{n+k}$ en dus $E_1 \cdot E_2 > 0$. Dit werkt omdat $n + k \geq 2$.

b. Staat de covariante afgeleide van een eenheidsvectorveld $\mathbf{X}$ op een n-oppervlak altijd loodrecht op $\mathbf{X}$?
Ja want $1 = \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}$ en links en rechts covariante afgeleide nemen geeft dan $0 = 2\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}$.

c. Stel ω is de connectie 1-vorm die hoort bij een rakend eenheidsvectorveld $\mathbf{X}$ op een open verzameling U van een compact 2-oppervlak in $\mathbb{R}^3$. Gegeven een gladde kromme α in U zo dat $\mathbf{X}$ parallel is langs α, bereken $\omega(\dot{\alpha})$.
Lemma 1 uit hoofdstuk 21 kunnen we toepassen op het geval $Z = X$ en dan volgt dat $\omega(\dot{\alpha})$ gelijk is aan de hoek van $\mathbf{X}$ met zichzelf, dus 0.

d. Op de eenheidscirkel $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ beschouwen we een volume 1-vorm η. Is η uniek? Bereken de pull-back $\phi^*\eta$ waarbij $\phi : S^1 \to S^1$ de rotatie over hoek $\frac{\pi}{3}$ is.
Nee, de volume-vorm is alleen uniek als de orientatie gekozen is. Er zijn precies twee gladde volumevormen op de cirkel. We willen laten zien dat $\phi^*\eta = \eta$. Kies een glad rakend eenheidsvectorveld $\mathbf{X}$ op S^1 met $\eta(\mathbf{X}) = 1$. We hoeven alleen maar te laten zien dat $\phi^*\eta(\mathbf{X}) = 1$. Merk op dat $d\phi(\mathbf{X}(p)) = \mathbf{X}(\phi(p))$. Uit de definitie volgt dat $\phi^*\eta(\mathbf{X}(p)) = \eta(d\phi(\mathbf{X}(p))) = \eta(\mathbf{X}(\phi(p))) = 1$.