Oefententamen Manifolds 1 2017-2018

Opgave 1 Een oneindige cilinder.
Beschouw de cilinder $S \subset \mathbb{R}^3$ rond de z-as met straal 1.

a. Bewijs dat S een 2-oppervlak is.

Beschouw voor $a, \omega \in \mathbb{R}$ de kromme $\gamma_{a,\omega} : [0,1] \to S$ gegeven door

$$\gamma_{a,\omega}(t) = (\cos \omega t, \sin \omega t, at).$$

b. Bewijs dat $\gamma_{a,\omega}$ een geodeet is.

c. Bereken het parallel transport $P_{\gamma_{a,\omega}}$.

Opgave 2 Oriëntatie.
Beschouw een georiënteerd n-oppervlak $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ met oriëntatie $\mathbf{N}$, en laat $p \in S$.

a. Veronderstel dat $V = (v_1 \dots, v_n)$ en $W = (w_1 \dots, w_n)$ geordende bases voor S_p zijn, en neem aan dat V consistent is met $\mathbf{N}$. Bewijs dat W consistent is met $\mathbf{N}$ dan en slechts dan als de matrix $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ gedefinieerd door $w_i = \sum_j a_{ji} v_j$ een positieve determinant heeft.

b. Stel dat $T, U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ twee georiënteerde n-oppervlakken zijn. Is $U \cup T$ ook georiënteerd? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

c. Vind een 1-manifold $X \subset \mathbb{R}^2$ dat geen 1-oppervlak is.

Opgave 3 Integratie.

a. Geef het oppervlak van de geparametriseerde torus in $\mathbb{R}^4$ met twee verwijderde cirkels gegeven door

$$\varphi(\theta, \phi) = (a \cos \theta, a \sin \theta, b \cos \phi, b \sin \phi)$$

met $a, b \in \mathbb{R}$ en $\theta, \phi \in (0, 2\pi)$.

Beschouw voor het vervolg van de vraag het 2-oppervlak $S = f^{-1}(1)$, met $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y, z) = (x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2),$$

met $a, b, c \in \mathbb{R}$, en laat $p \in S$.

b. Bereken de Weingartenafbeelding L_p.

Beschouw nu ook $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1\}$.

c. Bewijs dat $S \cap T$ een compact 2-oppervlak met rand is.

d. Bewijs dat elk glad rakend vectorveld $\mathbf{X} : S \cap T \to \mathbb{R}^3$ een nulpunt heeft.

Beschouw nu ook $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -1 \text{ of } z = 1\}$.

e. Bewijs: $\int_{S \cap U} x dy + y dx = 0$.