Opgaven bij het vormen van ruimte: van Poincaré tot Perelman

Roland van der Veen

Inleiding

Deze reeks opgaven is bedoeld voor de werkcolleges van de vakantiecursus *Wiskunde in Wording*, Augustus 2013.

1 Topologie

Poincaré dacht na over ruimtelijke objecten, *oppervlakken*, die worden gevormd door driehoeken aan elkaar te plakken. Hierbij ging het hem niet om de precieze details van hoeken en lengten maar om de globale vorm, de *toplogie*. Welke oppervlakken lijken op elkaar en welke helemaal niet en hoe bewijs je dat?

Om zulke vragen te beantwoorden gebruikte Poincaré het zogenaamde *Eulergetal*. Het Eulergetal χ (chi) kun je eenvoudig berekenen door het aantal punten V (*vertices*), het aantal zijden E (*edges*) en het aantal driehoeken F (*faces*) te tellen. Het Eulergetal is dan $\chi = V - E + F$.

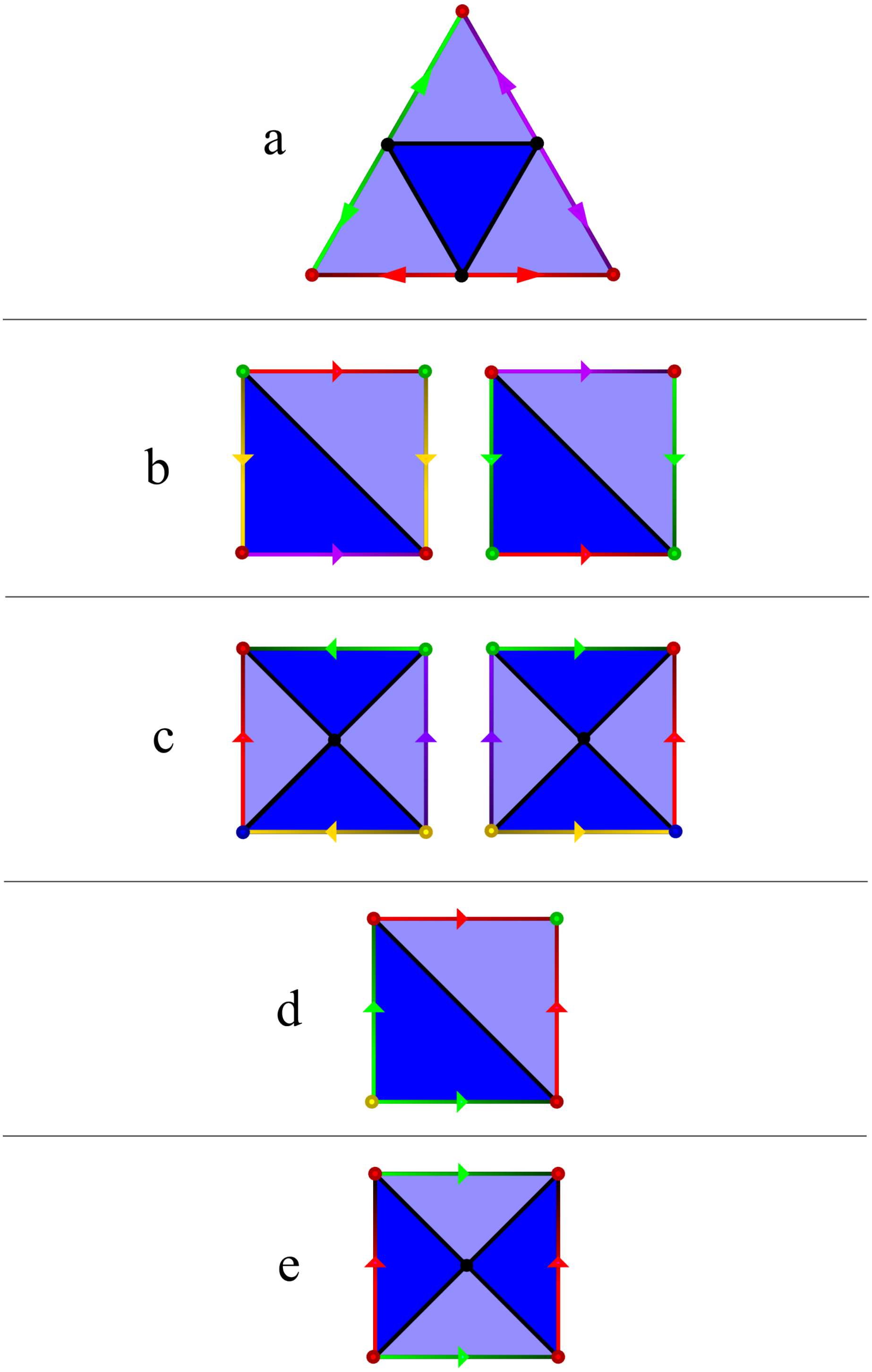
1.1 Opgave bouwplaten

Hieronder staan bouwplaten voor vijf oppervlakken. Iedere bouwplaat bestaat uit een aantal driehoeken waarvan de zijden met dezelfde kleur volgens de pijltjes aan elkaar vast moeten zitten. De punten die dezelfde kleur hebben komen ook op elkaar terecht en vormen dus samen één hoekpunt. Bouwplaat b bestaat bijvoorbeeld uit twee losse stukken van twee driehoeken elk die volgens de instructies uiteindelijk allemaal aan elkaar komen te zitten. Uiteindelijk blijven er twee punten en zes zijden (ribben) over.

a. Bereken van elk van de vijf oppervlakken het Eulergetal.

b. Schets zo goed mogelijk hoe het figuur er uit komt te zien wanneer we de pijltjes daadwerkelijk aan elkaar vast zouden plakken. Hierbij zullen de rechte lijnen en vlakken noodzakelijk vervormd moeten worden. Dat is geen probleem, dat is nu juist topologie!

c. Zie je een verband tussen het Eulergetal en de globale vorm van je schetsen?



Figuur 1: Bouwplaten van oppervlakken.

2 Meetkunde

Perelman pakte het probleem van het classificeren van oppervlakken heel anders aan: Hij probeerde ze **in een zo regelmatig mogelijke standaardvorm te brengen**. De vorm van een oppervlak wordt bepaald door iedere lijn een specifieke lengte te geven, dit heet ook wel een (discrete) *metriek*. In figuur 3 is bij elke bouwplaat uit figuur 1 een metriek gegeven. Voor het gemak hebben we eenvoudige getallen gekozen.

Er zijn een hoop metrieken mogelijk, maar welke is nu de mooiste? Welke metriek is het regelmatigste?

Om hier een antwoord op te vinden gebruikte Perelman het begrip *kromming*. De kromming is een getal dat in ieder hoekpunt de meetkundige vorm van het oppervlak beschrijft. De kromming in een punt p (notatie κ_p) wordt berekend uit de som van de hoeken rond dat punt. Preciezer gezegd is de kromming gedefinieerd door $\kappa_p = 2\pi - \text{hoeksom}$.

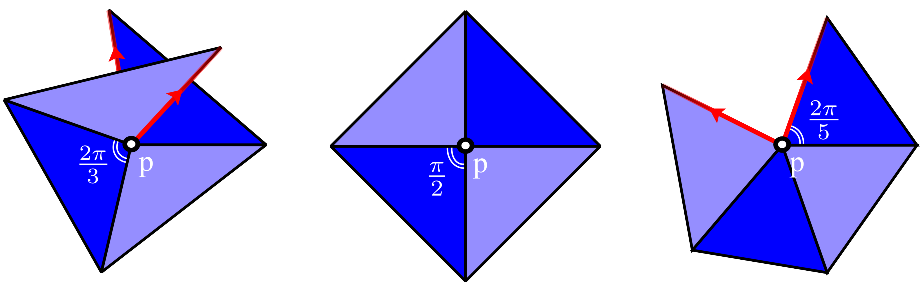
2.1 Opgave kromming

Hieronder staan drie bouwplaten voor een stukje van een oppervlak. De hoeken van de driehoeken zijn in radialen weergegeven.

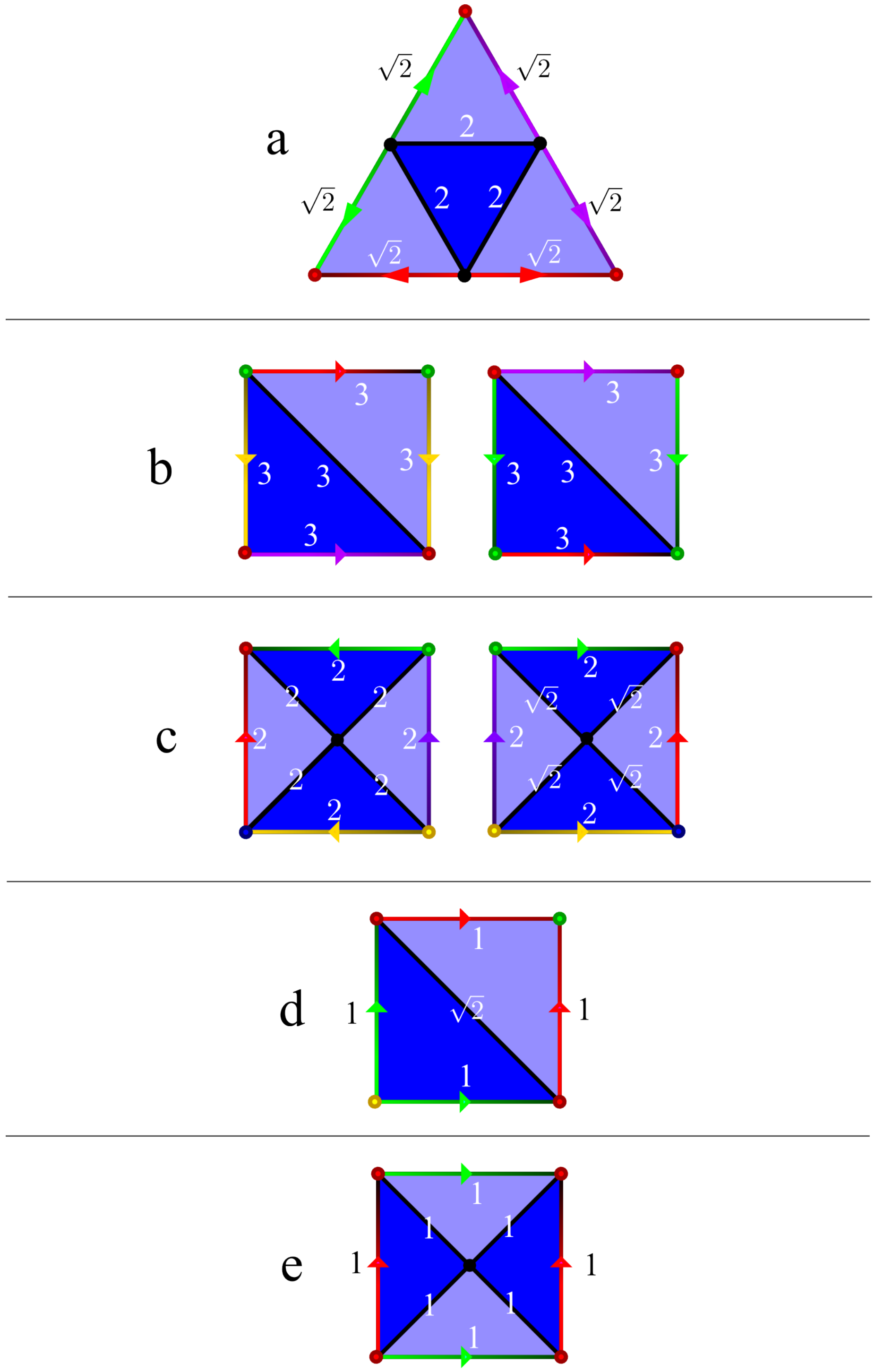
a. Geef voor elk van de drie gevallen aan of de kromming positief, negatief of 0 is in het punt p.

b. Schets ook hoe het oppervlak ruimtelijk uit zou komen te zien als de rode zijden in de bouwplaat aan elkaar zouden plakken.

c. Op welke plaatsen op een zwemband denk je dat de kromming positief is? En waar is die juist negatief?



Figuur 2: Drie typische mogelijkheden voor de kromming in een punt p.



Figuur 3: De lengte (metriek) van iedere zijde is er bij geschreven.

2.2 Opgave totale kromming

a. Bereken met behulp van de cosinusregel de kromming in ieder punt van de bouwplaten in figuur 3. Pas op, op de rand van de bouwplaat komen vaak meerdere punten bij elkaar (die hebben dezelfde kleur) bovendien zijn de bouwplaten niet op schaal getekend. Alle hoeken die bij deze punten samenkomen vormen samen de hoeksom voor één enkel punt.

b. Waarom verandert de kromming niet wanneer we de lengten van alle zijden met een positief getal vermenigvuldigen (schalen)?

c. Bereken steeds ook de *totale kromming*, de som van de krommingen in alle punten van het oppervlak.

d. Zie je een verband met opgave 1.1?

2.3 Opgave de optimale metriek

De mooist mogelijke vorm, de optimale metriek van een oppervlak is volgens Perelman die metriek waar de kromming overal constant is. Hij bewees dat deze metriek op schalen na uniek is.

a. Ga na dat de metriek die de vier zijden in het midden van bouwplaat e (figuur 3) lengte $\sqrt{2}$ geeft en de rest lengte 2, de constante kromming metriek is.

b. Zoek ook voor de andere bouwplaten van de bouwplaten uit de vorige opgave de optimale metriek.

Na de pauze gaan we dieper in op de vraag hoe je deze metrieken kunt vinden.

3 Differentiaalvergelijkingen

Perelman slaagde er in om het Poincarévermoeden op te lossen door iedere ruimte, hoe vreemd ook, in zijn optimale vorm te brengen. Voor ons betekent de optimale vorm de metriek met constante kromming. Perelmans belangrijkste gereedschap was de *Ricci-flow*, een stelsel differentiaalvergelijkingen voor de metriek.

3.1 Opgave cirkelmetrieken

Om de Ricci-flow te beschrijven beperken we ons tot een speciaal soort metrieken: *cirkelmetrieken.* Aan ieder punt kennen we een positief getal toe: de straal. De lengte van een zijde wordt nu bepaald door de som van de stralen van begin- en eindpunt te nemen. (Ook als begin en eindpunt gelijk zijn).

a. Welke van de metrieken uit figuur 3 komt van een cirkelmetriek?

b. Wat zijn de bijbehorende stralen?

3.2 Opgave straal en kromming

De Ricci-flow is gebaseerd op de antwoorden op volgende vragen:

a. Hoe verandert de kromming in een punt als we de straal in dat punt wijzigen?

b. Hoe verandert de kromming in een nabijgelegen punt?

Met de cosinusregel kunnen we de kromming in ieder punt altijd expliciet uitdrukken in termen van de stralen (in het onderstaande geval kan het wat eenvoudiger). Om dit te doen voor bouwplaat e in figuur 1 noemen we de punten p en q. Het punt p is het punt midden in de bouwplaat. De vier punten op de hoeken van de bouwplaat worden samengeplakt tot het enkele punt q. Er komen dus acht hoeken samen rond q en vier rond p.

c. Schrijf de krommingen $\kappa_p(r_p, r_q)$ en $\kappa_q(r_p, r_q)$ als functies van de stralen r_p en r_q.

3.3 Opgave Ricci-flow

Het idee van de *Ricci-flow* is om met een willekeurige cirkelmetriek te beginnen en die vervolgens stapje voor stapje aan te passen tot de kromming overal constant is. Voor de pauze hebben we gezien dat de totale kromming niet afhangt van de gekozen metriek. Delen we de totale kromming door het aantal punten dan krijgen we de gemiddelde kromming, notatie $\bar{\kappa}$. Het doel is dus om de kromming in ieder punt gelijk aan $\bar{\kappa}$ te maken.

Om de aanpassingen van de stralen goed bij te houden schrijven we de straal in ieder punt als een functie van de tijd, $r_p(t)$. Op basis van de ideeë uit de vorige opgave stelde Perelman de volgende Ricci-flow vergelijkingen voor om de stralen aan te passen. De Ricci-flow is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen (één vergelijking voor ieder punt p):

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = -r_p(t)(\kappa_p(t) - \bar{\kappa})$$

a. Laat de tijd in stapjes Δt gaan en vervang de afgeleide in de bovenstaande formule door het differentiequotient.

b. Beredeneer hiermee dat de Ricci-flow in iedere stap de kromming gunstig aanpast.

c. Schrijf de twee Ricci-flow vergelijkingen op voor de bouwplaat e uit figuur 1. Wat is $\bar{\kappa}$ in dit geval?

3.4 Opgave convergentie van de Ricci-flow

We gaan dieper in op de Ricci-flow in het geval van bouwplaat e in figuur 1. Om het onszelf gemakkelijker te maken schalen we de metrieken zo dat de straal in het punt q steeds gelijk is aan 1. Kies verder een willekeurige beginstraal in het andere punt p. Bijvoorbeeld ook gelijk aan 1. Dus $r_p(0) = 1$.

Het doel van deze opgave is om te laten zien dat de oplossing $r_p(t)$ van de Ricci-flow vergelijking in het punt p convergeert naar de cirkelmetriek met constante kromming 0. De optimale standaardvorm dus. Volgens opgave 2.3a betekent dat in ons geval dat

$$\lim_{t\to\infty} r_p(t) = \sqrt{2} - 1$$

a. Schrijf de Ricci-flow vergelijking voor het punt p op.

b. Pas de substitutie $r_p(t) = e^{u(t)}$ toe en herschrijf de vergelijking in de vorm $\frac{du(t)}{dt} = \ldots$.

c. Gebruik opgave 3.2a (of de formule) om in te zien dat $-\kappa_p(r_p)$ monotoon dalend is in r_p. Leg uit waarom $-\kappa_p(e^{u(t)})$ dus ook dalend is in $u(t)$.

d. Vind getallen u_1 en u_2 zo dat $-\kappa_p(e^{u_1}) > 0$ en $-\kappa_p(e^{u_2}) < 0$. Leid nu uit deel c af dat $-\kappa_p(e^u)$ een uniek nulpunt u_0 heeft.

e. Ga na dat de oplossing van de vergelijking uit deel b de eigenschap heeft dat als $-\kappa_p(e^{u(t)})$ positief is, de $u(t)$ toeneemt en dat $u(t)$ afneemt als $-\kappa_p(e^{u(t)})$ negatief is.

f. Concludeer uit deel e dat de oplossing $u(t)$ convergeert naar het nulpunt u_0 uit deel d.

g. Concludeer tot slot dat $r_p(t) = e^{u(t)}$ daarom convergeert naar e^{u_0} en dat dit inderdaad de straal is zo dat de kromming in p gelijk is aan 0.

h. Waarom is de kromming in q dan automatisch ook 0?